1.2. DINAMICA

1.2.1. PRINCIPIILE MECANICII

I. Principiul inerţiei

Un corp îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă cât timp asupra sa nu acţionează alte corpuri care să îi schimbe această stare de mişcare.

Măsura inerţiei este masa; se notează m sau M şi $[m]_{SI} = kg$. Masa unui corp omogen se poate exprima cu ajutorul densităţii ρ:

$\boxed{m = \rho \cdot V}$, unde V este volumul corpului şi $[\rho]_{SI} = kg/m^3$.

II. Principiul fundamental al dinamicii

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

- Poate fi privit ca o definiţie a forţei
- De aici se deduce şi unitatea de măsură pentru forţă: $[F]_{SI} = kg \cdot m/s^2 = N(newton)$
- Atunci când asupra unui corp acţionează, simultan, mai multe forţe, $\vec{F}$ reprezintă rezultanta acestora

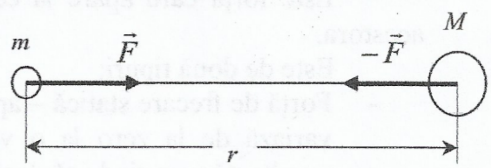
III. Principiul acţiunii şi reacţiunii

Dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă numită acţiune, cel de-al doilea reacţionează cu o forţă egală şi de sens contrar numită reacţiune.

1.2.2. TIPURI DE FORŢE

I. Forţa gravitaţională

Este forţa dintre două corpuri punctiforme (cu dimensiunile neglijabile în raport cu distanţa dintre ele) de masă M şi m aflate la distanţa r. Expresia este dată de legea atracţiei universale a lui Newton:



$$\boxed{F = k\frac{M \cdot m}{r^2}},$$

unde $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ se numeşte constanta gravitaţională. Datorită acestei valori foarte mici, forţa gravitaţională este semnificativă numai dacă cel puţin unul dintre corpuri are masa foarte mare.

Dacă M reprezintă masa unei planete (de exemplu Pământul), iar m este masa unui corp oarecare, forţa gravitaţională devine **greutatea corpului**:

$\boxed{G = m \cdot g}$

unde $g = k\dfrac{M}{r^2}$ este acceleraţia gravitaţională, iar $r = R + h$, R fiind raza planetei şi h altitudinea.

La nivelul solului, pentru $h = 0$, se obţine $g = k\dfrac{M}{R^2}$. Pentru Pământ, la nivelul solului, $g \cong 9{,}81\,m/s^2$, iar $R \cong 6370km$ (valori medii).

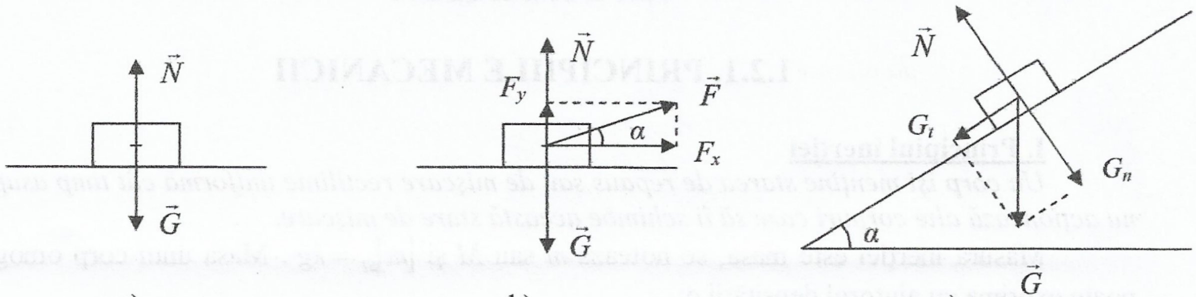
Se poate defini şi intensitatea câmpului gravitaţional al corpului ceresc de masă M:

$\vec{\Gamma} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, cu mărimea $\Gamma = k\dfrac{M}{r^2}$, unde $[\Gamma]_{SI} = N/kg$.

II. Reacţiunea normală

Este forţa cu care reacţionează o suprafaţă la apăsarea exercitată de un corp asupra ei. Se notează cu N şi este orientată întotdeauna perpendicular pe suprafaţă.

Ea nu este egală întotdeauna cu greutatea, ci cu forţa de apăsare normală. Exemple:

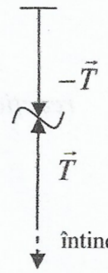


a) b) c)

- în cazul a) $N = G = mg$;
- în cazul b) $N = G - F_y = mg - F\sin\alpha$, unde $F_x = F\cos\alpha$ şi $F_y = F\sin\alpha$ sunt componentele forţei $\vec{F}$ pe direcţiile orizontală şi verticală;
- în cazul c) $N = G_n = mg\cos\alpha$, unde $G_t = mg\sin\alpha$ şi $G_n = mg\cos\alpha$ sunt, respectiv, greutatea tangenţială şi greutatea normală, sau componentele greutăţii pe planul înclinat.

III. Tensiunea în fir

Este forţa care apare într-un fir inextensibil ca reacţiune la forţa de întindere ce acţionează asupra sa.



- În orice secţiune a firului apar două tensiuni egale şi de sens contrar; una acţionează asupra unui capăt al firului, iar a doua asupra celuilalt.
- De-a lungul unui fir ideal, tensiunea are aceeaşi valoare în orice punct.

IV. Forţa de frecare

Este forţa care apare la contactul dintre două corpuri, opunându-se deplasării relative a acestora.

Este de două tipuri:

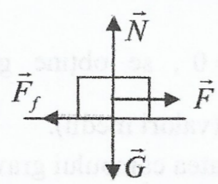
- Forţă de frecare statică – apare cât timp corpurile nu alunecă; ea nu are valoare constantă ci variază de la zero la o valoare maximă, fiind în permanenţă egală în modul cu forţa rezultantă care tinde să deplaseze corpurile unul faţă de celălalt;
- Forţă de frecare la alunecare – apare din momentul în care corpurile încep să se mişte unul faţă de celălalt.

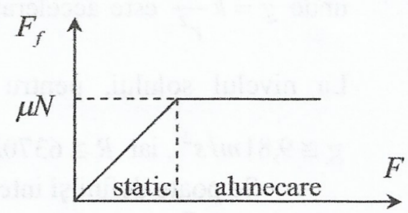
<u>*Legile frecării*</u>

1. Forţa de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafeţelor în contact.
2. Forţa de frecare la alunecare este direct proporţională cu forţa de apăsare exercitată de un corp asupra celuilalt.

$\boxed{F_f = \mu \cdot N}$, unde μ este *coeficientul de frecare la alunecare.*

Această forţă de frecare la alunecare reprezintă, teoretic, limita maximă a forţei de frecare statică:

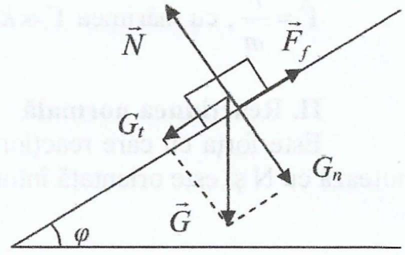




<u>*Unghiul de frecare*</u>

Reprezintă unghiul planului înclinat pentru care un corp alunecă uniform pe plan:

$$\begin{cases} N = G_n \\ G_t - F_f = m \cdot a \end{cases}$$ şi



înlocuind $\begin{matrix} G_n = mg\cos\varphi \\ G_t = mg\sin\varphi \end{matrix}$; $\begin{matrix} F_f = \mu N \\ a = 0 \end{matrix}$

se obţine $\boxed{tg\varphi = \mu}$

Randamentul planului înclinat

Se poate calcula ca raportul dintre:

- lucrul mecanic util – necesar pentru a ridica uniform un corp direct pe verticală până la o înălţime oarecare;

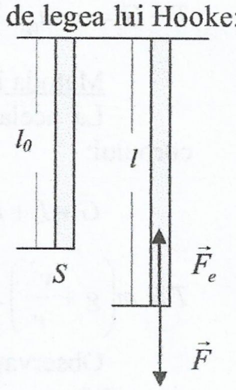
- lucrul mecanic consumat – necesar pentru a ridica uniform acelaşi corp, până la aceeaşi înălţime, pe planul înclinat cu frecare.

$\boxed{\eta = \dfrac{L_u}{L_c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}$, unde α este unghiul planului, iar μ este coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi plan.

V. Forţa elastică

Este forţa care apare într-un corp deformabil elastic şi se opune deformării.

Pentru un corp elastic liniar omogen, proprietăţile elastice sunt descrise de legea lui Hooke:



$\boxed{\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta l}{l_0}}$, unde

F = forţa deformatoare

S = secţiunea corpului

$\Delta l = l - l_0$ = alungirea corpului

l_0 = lungimea corpului în stare nedeformată

E = modulul de elasticitate (modulul lui Young) care depinde de material, unde $[E]_{SI} = N/m^2$.

Legea se mai poate scrie sub o formă concentrată:

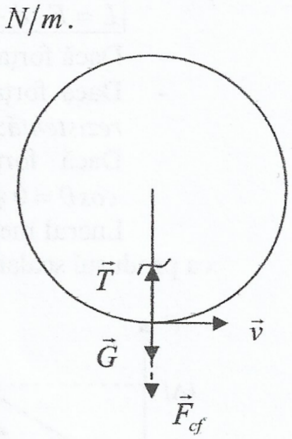
$\boxed{\sigma = E\cdot\varepsilon}$, unde $\sigma = \dfrac{F}{S}$ se numeşte efortul unitar, iar $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ este alungirea relativă.

Cum forţa elastică este egală în modul cu forţa deformatoare, din legea lui Hooke rezultă $F = \dfrac{E\cdot S}{l_0}\cdot\Delta l$ şi dacă presupunem că secţiunea este practic constantă, raportul $k = \dfrac{E\cdot S}{l_0}$ reprezintă constanta elastică a corpului. Atunci, $\boxed{F_e = k\cdot\Delta l}$, iar vectorial, deoarece forţa elastică se opune deformării, $\boxed{\vec{F}_e = -k\cdot\Delta\vec{l}}$.

Constanta elastică este o proprietate a fiecărui corp în parte. $[k]_{SI} = N/m$.

VI. Forţa centrifugă

Mişcarea circulară uniformă, ca orice mişcare curbilinie, este o mişcare accelerată. În acest caz, acceleraţia are orientarea pe direcţia razei (normal la traiectorie), spre centrul cercului. Ea se datorează variaţiei vectorului viteză ca orientare, modulul rămânând constant. Această acceleraţie se numeşte *acceleraţie centripetă* şi are expresia:



$\boxed{a_{cp} = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2\cdot r}$

Dinamica mişcării circulare uniforme poate fi tratată în două moduri:

1. *Inerţial*

Aplicăm principiul fundamental al dinamicii şi spunem că rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra corpului este egală cu masa înmulţită cu acceleraţia centripetă $\vec{R} = m \cdot \vec{a}_{cp}$.

2. *Neinerţial*

Ne plasăm, imaginar, în centrul traiectoriei, cu faţa spre corp şi presupunem că acesta este tot timpul în echilibru. În acest caz, este necesar să introducem o forţă suplimentară, în sens invers acceleraţiei centripete, pe care o numim forţă centrifugă:

$$\boxed{F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r}.$$

Exemplu:

Un om roteşte cu viteză constantă un corp de masă m, cu ajutorul unui fir, în plan vertical. Care este tensiunea în fir în punctul inferior?

Metoda I (inerţial):

Asupra corpului acţionează greutatea şi tensiunea în fir. Din principiul fundamental, $\vec{G} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_{cp}$ şi dacă ţinem cont de orientare (acceleraţia centripetă este orientată vertical în sus), $T - G = m \cdot a_{cp}$. Înlocuind expresiile greutăţii şi acceleraţiei centripete, obţinem $T = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$.

Metoda II (neinerţial):

La acelaşi rezultat se ajunge dacă introducem forţa centrifugă şi presupunem echilibrul corpului:

$\vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_{cf} = 0$ şi dacă ţinem cont de orientare, $T = G + F_{cf}$, deci $T = mg + \frac{mv^2}{r}$, sau $T = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$.

Observaţie: Denumirea de *forţă centripetă* este oarecum improprie. Ea nu este o forţă de sine stătătoare aşa cum sunt greutatea, tensiunea în fir etc. Mai corect ar fi să spunem că rezultanta forţelor care acţionează asupra corpului şi care face ca acesta să se mişte pe traiectoria circulară este de tip centripet, adică este orientată spre interiorul traiectoriei.

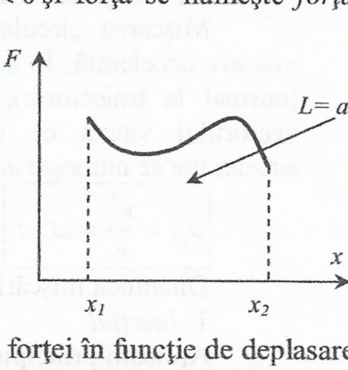
1.2.3. ENERGIA MECANICĂ

I. LUCRUL MECANIC

Lucrul mecanic al unei forţe constante F al cărei punct de aplicaţie se deplasează pe distanţa d şi care face unghiul cu θ cu deplasarea este:

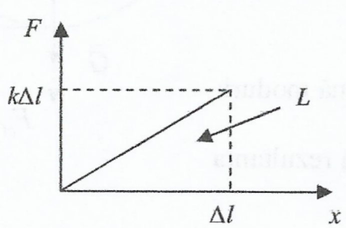
$\boxed{L = F \cdot d \cdot \cos\theta}$, unde $[L]_{SI} = J(joule)$.

- Dacă forţa este în sensul deplasării, $\cos\theta > 0$, deci $L > 0$ şi forţa se numeşte *forţă motoare*;
- Dacă forţa este în sens invers deplasării, $\cos\theta < 0$, deci $L < 0$ şi forţa se numeşte *forţă rezistentă*;
- Dacă forţa este perpendiculară pe direcţia deplasării, $\cos\theta = 0$ şi $L = 0$.



Lucrul mecanic este o mărime scalară care se poate scrie şi ca produsul scalar dintre vectorul forţă şi vectorul deplasare:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



Pentru forţe care nu sunt constante, se poate calcula lucrul mecanic geometric, ca fiind egal numeric cu aria cuprinsă sub graficul forţei în funcţie de deplasare:

Metoda se poate aplica, de exemplu, pentru forţa elastică.

$F_e = k \cdot \Delta l$

Calculând aria de sub grafic, se obţine:

$L_{F_e} = -\frac{k \cdot (\Delta l)^2}{2}$ unde semnul – se datorează faptului că forţa elastică este în sens invers deformării, deci este o forţă rezistentă ($\theta = 180°,\ cos\,\theta = -1$).

II. PUTEREA MECANICĂ

Este mărimea care descrie capacitatea unui sistem de a face lucru mecanic L într-un timp t cât mai scurt.

$\boxed{P = \frac{L}{t}}$, unde $[P]_{SI} = W(watt)$. Pentru o forţă motoare constantă care acţionează asupra unui corp, se defineşte puterea instantanee $P = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot v$, unde v este viteza corpului.

III. ENERGIA MECANICĂ

Este mărimea care descrie capacitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic. Este de două tipuri:

- energie cinetică
- energie potenţială

A. Energia cinetică

Este energia pe care o au corpurile în mişcare. Se poate defini plecând de la mişcarea rectilinie uniform variată, folosind ecuaţia Galilei şi principiul fundamental al dinamicii. Considerăm un corp de masă m care sub acţiunea forţei $\vec{F}$ se mişcă cu acceleraţia $\vec{a}$ şi îşi modifică viteza de la $\vec{v}_1$ la $\vec{v}_2$. Din ecuaţia Galilei,

$v_2^2 = v_1^2 + 2ad$ şi înmulţind cu $\frac{m}{2}$ şi ştiind că $F = m \cdot a$, obţinem relaţia

$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + m \cdot a \cdot d$, sau $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = F \cdot d$.

Termenul $\boxed{E_c = \frac{mv^2}{2}}$ reprezintă energia cinetică a corpului, unde $[E_c]_{SI} = J$. Ultima relaţie se mai poate scrie: $E_{c_2} - E_{c_1} = L$, sau

$\boxed{\Delta E_c = L}$.

Această ultimă relaţie reprezintă *teorema variaţiei energiei cinetice* a punctului material: variaţia energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic total efectuat asupra sa.

B. Energia potenţială

Forţele care acţionează asupra unui punct material pot fi împărţite în două categorii:

- forţe conservative – pentru care lucrul mecanic nu depinde de drum;
- forţe neconservative.

În mecanică, singurele forţe conservative sunt forţa gravitaţională (greutatea) şi forţa elastică. Pentru aceste forţe se defineşte energia potenţială prin relaţia:

$\boxed{\Delta E_p = -L_{cons}}$ (variaţia energiei potenţiale este egală cu minus lucrul mecanic al forţelor conservative). $[E_p]_{SI} = J$.

a) Energia potenţială gravitaţională

Se defineşte prin relaţia $\Delta E_p = -L_G$. Dacă un corp se mişcă în câmp gravitaţional sub acţiunea greutăţii de la înălţimea h_0 la înălţimea h, $L_G = mg(h - h_0)$ şi deci $\Delta E_p = mgh - mgh_0$. Se poate scrie că energia potenţială a corpului la înălţimea h este $E_p = mgh + E_{p_0}$, unde termenul E_{p_0} este o constantă arbitrară.

De regulă, preferăm să scriem că $\boxed{E_p = mgh}$ şi socotim înălţimea h faţă de nivelul minim la care poate să ajungă corpul în mişcarea sa.

b) Energia potenţială elastică

Se defineşte din relaţia $\Delta E_p = -L_{F_e}$, unde $L_{F_e} = -\dfrac{k \cdot (\Delta l)^2}{2}$. Atunci $\boxed{E_{p_e} = \dfrac{k \cdot (\Delta l)^2}{2}}$, unde am presupus că energia potenţială elastică este nulă atunci când $\Delta l = 0$ (corp nedeformat).

Legea conservării energiei mecanice

Definim energia mecanică totală a unui sistem ca fiind suma energiilor cinetică şi potenţiale pe care le are acesta la un moment dat: $E = E_c + E_p$. Din teorema variaţiei energiei cinetice, $\Delta E_c = L$, unde lucrul mecanic se poate defalca pe forţe conservative şi neconservative:

$\Delta E_c = L_{cons} + L_{necons}$, iar $\Delta E_p = -L_{cons}$. Prin înlocuire, se obţine că $\Delta(E_c + E_p) = L_{necons}$, sau $\Delta E_{tot} = L_{necons}$. De aici rezultă legea conservării energiei:

Energia totală a unui sistem aflat în câmp conservativ de forţe se conservă.

$L_{necons} = 0 \Rightarrow \Delta E_{tot} = 0$ şi deci $\boxed{E_{tot} = const.}$

1.2.4. IMPULSUL MECANIC

I. IMPULSUL PUNCTULUI MATERIAL

Se defineşte plecând de la principiul fundamental al dinamicii:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, unde $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Înlocuind, rezultă $\vec{F} = m\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$.

Mărimea vectorială $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ reprezintă impulsul punctului material, unde $[p]_{SI} = kg\dfrac{m}{s}$.

Cu această definiţie, principiul fundamental se mai poate scrie sub forma:

$\boxed{\vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}}$, relaţie care reprezintă <u>*teorema variaţiei impulsului punctului material*</u>.

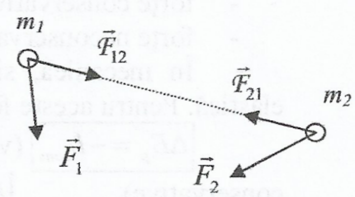
Din această teoremă, rezultă <u>legea conservării impulsului</u> punctului material: *Impulsul unui punct material izolat se conservă* (dacă $\vec{F} = 0$, atunci $\Delta\vec{p} = 0$, adică $\vec{p} = const.$).

II. IMPULSUL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Considerăm două puncte materiale care interacţionează. Apar două tipuri de forţe:

- forţe interne – sunt egale şi de sens contrar ($\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21}$)
- forţe externe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$.

Aplicând teorema variaţiei impulsului pentru fiecare punct material, rezultă:



$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12} = \dfrac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} \\ \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21} = \dfrac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \end{cases}$$

, de unde, prin însumare, reducându-se forţele interne, obţinem: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \dfrac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t}$, sau $\boxed{\vec{F}_{ext} = \dfrac{\Delta \vec{P}_{tot}}{\Delta t}}$, relaţie care reprezintă <u>*teorema variaţiei impulsului pentru sistemul de puncte materiale*</u>: Variaţia impulsului total al sistemului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forţelor externe (forţele interne nu contribuie la modificarea impulsului total).

De aici se obţine <u>legea conservării impulsului</u>: *Impulsul total al unui sistem izolat de puncte materiale se conservă* ($\vec{F}_{ext} = 0$, rezultă $\vec{P}_{tot} = const.$).